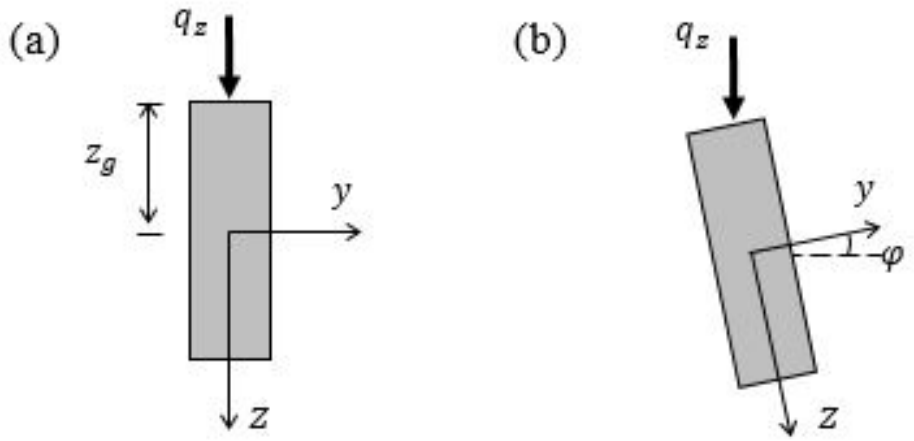
Kiepahdusmomentti teräs- ja puurakenteiden mitoituksessa

17.6.2020

KIEPAHDUSILMIÖSTÄ

Kiepahdus on taivutetun sauvarakenteen stabiiliudenmenetysilmiö, jossa sauva tietyllä kuorman arvolla (Kuvassa 1 q_z) menettää kuormankantokykynsä. Kiepahduksessa sauvan poikkileikkaus siirtyy kuormitustasoon nähden poikittaissuuntaan (Kuvassa 1(a) *y*-akselin suuntaan) ja samalla kiertyy poikkileikkauksen vääntökeskiön ympäri kulman φ verran (Kuva 1(b)). Lisäksi poikkileikkaus tietenkin siirtyy kuorman suuntaan (Kuvassa 1(a) *z*-akselin suuntaan). Kiepahduksessa sauvan materiaalin lujuus on vielä riittävä verrattuna syntyviin jännityksiin.



Kuva 1: Suorakaidepoikkileikkaus (a) ennen kiepahdusta ja (b) kiepahduksessa.

Kiepahdus liittyy erityisesti palkkien mitoitukseen, koska palkkien tapauksessa merkittävänä rasitussuureena on juuri taivutukseen liittyvä taivutusmomentti. Kiepahdusmomentiksi nimitetään palkin suurinta taivutusmomenttia ao. kuormitustapauksessa. Kiepahdus-momentin suuruuteen vaikuttaa monet seikat, kuten: palkin päiden tuenta, poikittaistuenta, poikkileikkausmuoto ja sen mitat, materiaaliarvot, kuormituksen suuruus, kuormituksen jakauma ja kuormituksen vaikutuskohdan sijainti poikkileikkauksessa. Erityisen herkkiä kiepahdukselle ovat poikkileikkaukset, joiden taivutusjäykkyys *z*-akselin suhteen on pieni suhteessa taivutusjäykkyyteen *y*-akselin suhteen. Lisäksi avoimet poikkileikkausmuodot (esim. I-profiili) ovat herkempiä kiepahdukselle kuin suljetut poikkileikkausmuodot (kotelopoikkileikkaukset) ja kuvan 1 suorakaidepoikkileikkaukset. (Timoshenko, Gere 2009)

KIEPAHDUSMOMENTTI RAKENTEIDEN MITOITUKSESSA

Rakenteiden mekaniikassa kiepahdusta kuvataan yleisessä tapauksessa kahdella neljännen kertaluvun

differentiaaliyhtälöllä. Niiden avulla kiepahdusmomentin laskenta ei ole yksinkertaista. Rakenteiden mitoittajan työtä helpottamaan on laadittu erilaisia kaavoja, joilla saadaan kiepahdusmomentille kuitenkin käytännön tapauksiin riittävän tarkka arvo. Näitä kaavoja tarkastellaan seuraavassa teräs- ja puurakenteiden yhteydessä. Rajoitutaan poikkileikkausmuotojen osalta tässä tarkastelemaan vain kotelopoikkileikkauksia sekä suorakaidepoikkileikkauksia. Avoimia poikkileikkausmuotoja ei tarkastella. Nämä rajoitukset yksinkertaistavat osaltaan tarkastelua. Hyvinä käytännön esimerkkeinä on suorakaiteen muotoinen rakenneputki teräsrakenteissa ja suorakaidepoikkileikkaus puurakenteissa.

Teräsrakenteet

Teräsrakenteiden kiepahdusmitoituksessa kiepahdusmomenttia merkitään symbolilla M_{cr} ja sen laskentakaava on suorakaide- ja kotelopoikkileikkauksen tapauksessa

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L_{cr}^2} \left(\sqrt{\frac{L_{cr}^2}{\pi^2} \frac{GI_t}{EI_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right) \tag{1}$$

missä kertoimet C_1 ja C_2 riippuvat palkin päiden tuennasta ja taivutusmomentin jakaumasta. EI_z on taivutusjäykkyys *z*-akselin suhteen, GI_t on vääntöjäykkyys ja z_g on kuorman vaikutuspisteen etäisyys poikkileikkauksen vääntökeskiöstä. Tässä käsiteltävillä poikkileikkausmuodoilla vääntökeskiö on poikkileikkauksen painopisteessä. Jos kuorman vaikutuspiste on suorakaideputken puristuspuolen reunalla on $z_g = 0{,}5h$ missä *h* on poikkileikkauksen korkeus. Vetopuolen reunalla sijaitsevalle kuormalle käytetään arvoa $z_g = -0{,}5h$ on kiepahduspituus, joka on palkin päiden väliltä poikittaissuunnassa tukemattomalle palkille sama kuin palkin jänneväli edellyttäen, että palkki on päistään vapaasti tuettu ja tuilla on poikittaistuenta. Palkin päiden väliltä poikittaistuetulle palkille kiepahduspituus on poikittaistukien välinen etäisyys. Kaavan (1) kertoimien C_1 ja C_2 arvoja löytyy kirjallisuudesta erilaisille tapauksille (SFS-EN 1999-1-1 liite I ja SSAB, SSAB Domex Tube Rakenneputket, 2016).

Puurakenteet

Puurakenteissa kiepahdusmomentin symboli on $M_{y,crit}$ ja sen laskentakaava on

$$M_{y,crit} = \frac{\pi}{l_{ef}} \left(\sqrt{E_{0,05} I_z G_{0,05} I_{tor}} \right) \tag{2}$$

missä $E_{0,05}I_z$ on taivutusjäykkyys *z*-akselin suhteen ja $G_{0,05}I_{tor}$ on vääntöjäykkyys. l_{ef} on puurakenteiden eurokoodin SFS-EN 1995-1-1 mukaan tehollinen pituus, jonka avulla huomioidaan kuormituksen tyyppi ja kuormituspisteen sijainti poikkileikkauksessa. Eurokoodin SFS-EN 1995-1-1 taulukossa 6.1 on esitetty tehollisen pituuden l_{ef} ja jännevälin l suhteelle taulukon 1 mukaiset arvot päistään vapaasti tuetulle palkille ja ulokepalkille. Poikittaistuetulle palkille jännevälinä käytetään poikittaistukien välistä etäisyyttä.

Palkin tuenta	Kuormituksen tyyppi	l_{ef}/l
Vapaasti tuettu	Vakiomomentti	1,0
	Tasaisesti jakautunut kuorma	0,9
	Pistekuorma jänteen keskellä	0,8
Uloke	Tasaisesti jakautunut kuorma	0,5
	Pistekuorma vapaassa päässä	0,8

Taulukko 1: Tehollisen pituuden ja jännevälin suhde l_{ef}/l (SFS-EN 1995-1-1).

Taulukossa 1 esitetyt arvot suhteelle l_{ef}/l ovat tapaukselle, missä kuorman vaikutuspiste on poikkileikkauksen vääntökeskiön korkeudella. Jos kuormitus vaikuttaa palkin puristetun reunan korkeudella, tehollisen pituuden arvoa suurennetaan mitan 2*h* verran, missä *h* on poikkileikkauksen korkeus. Jos kuormitus vaikuttaa palkin vedetyn reunan korkeudella, tehollisen pituuden arvoa pienennetään mitan 0,5*h* verran.

Kiepahdusmomentin kaavojen vertailua

Teräsrakenteissa käytettävässä kaavassa (1) kertoimet C_1 ja C_2 huomioivat taivutus-momentin jakauman ja palkin päiden tuennan. Puurakenteissa käytettävä kaava (2) sensijaan on tarkka vain kun taivutusmomentilla on vakioarvo, palkki päistään vapaasti tuettu ja kuorma vaikuttaa poikkileikkauksen vääntökeskiön korkeudella. Koska kaava (1) on luonteelta tarkempi, on mielenkiintoista selvittää mihin se johtaa, jos sitä käytetään puurakenteiden yhteydessä.

Jos kuorma vaikuttaa poikkileikkauksen vääntökeskiön korkeudella (joka tosin on melko teoreettinen tapaus), niin teräsrakenteiden kaavan (1) osa $C_2 z_g$ jää kokonaan pois. Tällöin kaava (1) yksinkertaistuu muotoon

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{EI_z GI_t} \qquad (3)$$

Verrattaessa tätä puurakenteiden kaavaan (2), havaitaan että (eikä välitetä erilaisista alaindeksimerkinnöistä taivutus- ja vääntöjäykkyyksissä)

$$\frac{C_1}{L_{cr}} = \frac{1}{l_{ef}} \tag{4}$$

Koska aikaisemmin todettiin, että merkinnät , niin kaavasta (4) saadaan tulokseksi tehollisen pituuden ja jännevälin suhteelle

$$\frac{l_{ef}}{l} = \frac{1}{C_1} \tag{5}$$

jota voidaan verrata taulukossa 1 esitettyihin arvoihin, kunhan C_1 katsotaan kirjallisuudesta. Tasaisella kuormalla kuormitetun, päistään vapaasti tuetun palkin tapauksessa (taulukon 1 toinen tapaus) saadaan kaavalla (5) tulokseksi $\frac{l_{ef}}{l} = \frac{1}{1{,}127} = 0{,}887$. Taulukon 1 pistekuormatapauksessa (kolmas tapaus) saadaan $\frac{l_{ef}}{l} = \frac{1}{1{,}348} = 0{,}742$. Huomataan, että saadut arvot ovat hiukan pienempiä kuin taulukon 1 arvot mutta pyöristettynä vastaavat likimain taulukon 1 arvoja.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, missä kuorma vaikuttaa poikkileikkauksen yläreunalla (puristuspuolella). Asetetaan kiepahdusmomentit (1) ja (2) yhtäsuuriksi ja ratkaistaan tehollinen pituus. Useiden välivaiheiden kautta päädytään lopuksi kaavaan

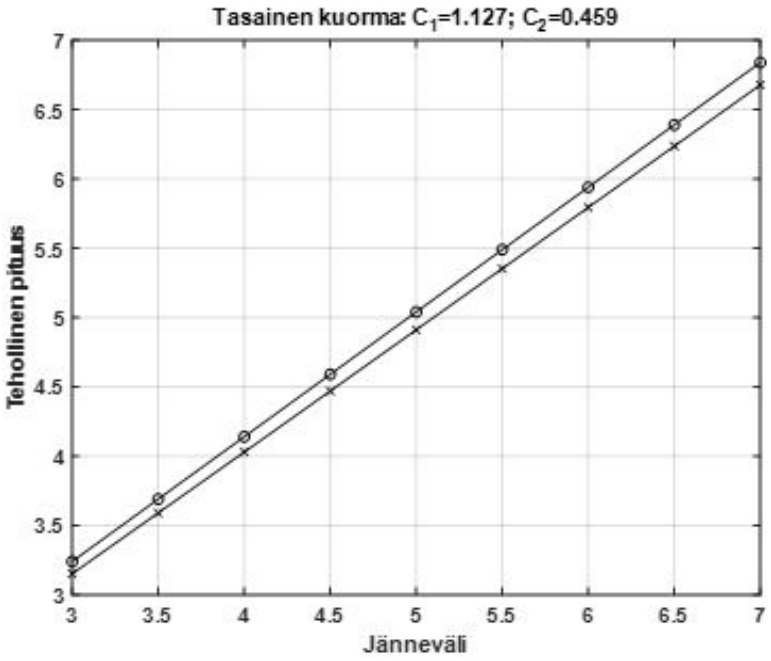
$$l_{ef} = \frac{C_2}{C_1}\pi Z_g\sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{C_1}\pi Z_g\right)^2\frac{EI_z}{GI_t} + \left(\frac{l}{C_1}\right)^2} \tag{6}$$

Numeerisia tuloksia

Kuvassa 2 on esitetty kaavalla (6) laskettu arvo palkin teholliselle pituudelle metreinä jännemitan funktiona liimapuupalkille GL30c (poikkileikkausmitat 115 mm x 270 mm) taulukon 1 toiselle tapaukselle (ylempi kuvaaja). Vertailun vuoksi kuvassa 2 on myös puurakenteiden eurokoodin ohjeen mukainen vastaava arvo eli

$$l_{ef} = 0{,}9l + 2h$$

(alempi kuvaaja).

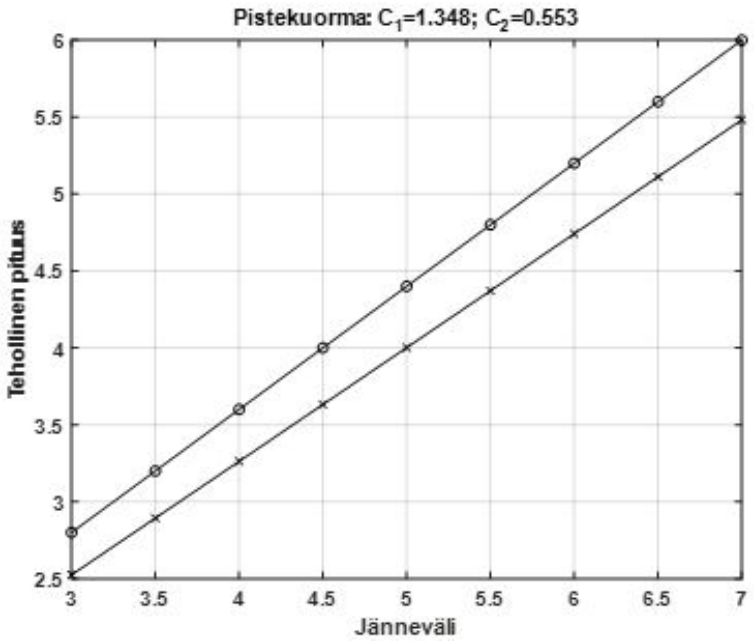


Kuva 2: Tehollinen pituus jännevälin funktiona liimapuupalkille GL30c.

Kuvassa 3 on esitetty kaavalla (6) laskettu arvo palkin teholliselle pituudelle metreinä jännemitan funktiona sahatavarapalkille C24 (poikkileikkausmitat 50 mm x 200 mm) taulukon 1 kolmannelle tapaukselle (ylempi kuvaaja). Vertailun vuoksi kuvassa 3 on myös puurakenteiden eurokoodin ohjeen mukainen vastaava arvo eli

$$l_{ef} = 0{,}8l + 2h$$

(alempi kuvaaja).



Kuva 3: Tehollinen pituus jännevälin funktiona sahatavarapalkille C24.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Vertailtiin teräs- ja puurakenteissa käytettäviä kiepahdusmomentin laskentatapoja toisiinsa. Kiepahdusmomentin mitoitustapa on puurakenteissa likimääräisempi kuin teräsrakenteissa. Numeeriset tulokset viittaavat samaan suuntaan.

LÄHTEET

Timoshenko, S.P., Gere, J.M. 2009: Theory of Elastic Stability, Dover, Second Edition.

Suomen Standardissoimisliitto SFS ry 2008: SFS-EN 1995-1-1, Eurokoodi 5: Puurakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt.

Suomen Standardissoimisliitto SFS ry 2007: SFS-EN 1999-1-1, Eurokoodi 9: Alumiinirakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt.

SSAB 2016: SSAB Domex Tube Rakenneputket EN 1993 – Käsikirja 2016, SSAB Europe Oy.

Martti Perälä
TkL, lehtori
SeAMK Tekniikka